EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

42e JAARGANG 1966/1967

I — 1 SEPTEMBER 1966

INHOUD

P. NOORDHOFF NV — GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,75; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 7,50.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. De contributie bedraagt f 9,00 (abonnement inbegrepen), over te schrijven naar postrekening 143917, ten name van Wimecos, Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 sept.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voorzover ze de wens daartoe te kennen geven aan de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort; postrekening 87185.

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij kunnen zich wenden tot de penningmeester van de Wiskunde-werkgroep W.V.O. te Haarlem; postrekening 614418.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, Joh. de Wittlaan 14 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

DE PLAATS VAN DE GESCHIEDENIS IN DE STUDIE DER WISKUNDE

Prof. Dr. E. J. DIJKSTERHUIS †

In het „In memoriam" gewijd aan de nagedachtenis van Prof. Dr. P. J. Dijksterhuis, dat opgenomen werd in het laatste nummer van de 40e jaargang van Euclides is erop gewezen dat Dijksterhuis zijn ideeën over de betekenis die kennis van de historie van de wiskunde voor het onderwijs kan hebben, overzichtelijk heeft uiteengezet in een van zijn laatste publikaties: "*The place of history in the training of a mathematics teacher*". Dit artikel werd opgenomen in rapport nummer 7 van de Nederlandse Onderwijscommissie voor wiskunde, uitgegeven onder redactie van Dr. L. H. N. Bunt en ingediend op het Internationaal Mathematisch Congres te Stockholm in 1962.

De redactie van Euclides is Mevrouw Dijksterhuis dankbaar voor de toestemming die zij heeft willen verlenen om de oorspronkelijke Nederlandse tekst van dit artikel in ons tijdschrift te doen opnemen.

De vraag naar de plaats die de geschiedenis der wiskunde in de studie van het vak behoort in te nemen, moet op verschillende wijze beantwoord worden, al naar gelang men aan wiskundestudie in het algemeen denkt of aan de opleiding tot leraar in wiskunde aan een middelbare school.

Van de wiskundestudie in het algemeen vormt de bestudering van de geschiedenis geen wezenlijk bestanddeel. Er bestaat geen enkele aanwijzing voor, dat iemand de hedendaagse wiskunde beter zou leren beheersen of vlugger zou leren kennen, wanneer hij zich eerst in de wordingsgeschiedenis had verdiept. De hedendaagse wiskunde is uit de oudere gegroeid; ze heeft overgenomen en behouden wat waarde had en heeft de rest afgestoten. Er is niet de minste reden zich met die rest nog eens weer te gaan bezighouden, zijn tijd te gaan besteden aan onderwerpen die door de ontwikkeling der wetenschap hun waarde verloren hebben, aan methoden die reeds lang door betere zijn vervangen. Men kan zich voorstellen dat de studie van de geschiedenis door hen die de moderne wiskunde als een efficiënt instrument wensen te gebruiken als een storend element wordt gevoeld.

Natuurlijk is het de vraag of dit standpunt ooit in zuivere vorm zal worden ingenomen. Het is te verwachten, dat bij velen weetgierigheid zal worden gewekt aangaande de herkomst van de behandelde problemen, van de toegepaste methoden, van de gebruikte

notaties. Deze weetgierigheid zal vanzelf bevrediging vinden in historische studie. Hetzelfde is het geval voor hen die belangstellen in de maatschappelijke betekenis van de wiskundige denkvorm of in de algemene culturele waarde van het wiskundig denken. Al deze categorieën zullen gebaat zijn bij onderwijs in de geschiedenis der wiskunde; dit zal echter geen essentieel bestanddeel van de studie zijn en zal in geen geval verplicht mogen worden gesteld.

Geheel anders is de situatie voor hen die zich voorbereiden op het ambt van leraar in wiskunde op een middelbare school. Hun bezigheid zal voornamelijk bestaan in het overdragen van kennis der wiskunde op jongeren, zo mogelijk in het wekken van liefde en bewondering voor wat de mens in de loop der eeuwen op dit gebied tot stand heeft gebracht. Voor hen is kennis van de historische ontwikkeling van het vak een niet slechts waardevol, maar rondweg onmisbaar bezit, dat hen, uiteraard in combinatie met een goede beheersing van de hedendaagse wiskunde, eerst in staat zal stellen, aan de eisen die hun werkkring stelt, te voldoen. Zij hebben voortdurend te maken met fasen uit de ontwikkeling der wiskunde die reeds lang tot de geschiedenis zijn gaan behoren en ze moeten die fasen duidelijk en aantrekkelijk maken voor jeugdige personen die op deze wijze in wiskundig denken moeten worden geoefend.

Het is weliswaar denkbaar, dat die oefening ook op geheel andere wijze te verkrijgen zal zijn. Men kan zich een didactiek der wiskunde denken die geheel onbekommerd is om de historische traditie en die slechts belemmerd zou worden door aandacht die daaraan besteed werd. Meer dan een denkbaarheid is dit echter niet. Onderwijs is nu eenmaal sterk traditioneel bepaald. Wenselijke veranderingen kunnen slechts zeer geleidelijk worden aangebracht. Tussen de groeiende wetenschap en het schoolonderwijs blijft steeds een aanzienlijk niveauverschil bestaan, waarmee een reële didactiek rekening zal moeten houden.

Dit geldt des te meer, omdat nooit uit het oog mag verloren worden, dat het onderwijs zich richt tot jeugdige personen die in het algemeen niet wiskundig begaafd zijn en ook niet specifiek wiskundig geïnteresseerd. Men kan er natuurlijk over twisten, in hoeverre het onvermijdelijk is, hiermee rekening te houden. Het is echter gewenst, de realiteit in het oog te houden. Men kan dan opmerken, dat het niet waarschijnlijk is, dat het aantal leerlingen, waaraan een zekere dosis wiskunde moet worden bijgebracht, zonder dat daaraan van hun kant spontane behoefte bestaat, in de naaste toekomst zal afnemen. De didactiek der wiskunde mag daarom niet gebasseerd worden op de onderstelling, dat alle

leerlingen wiskundig begaafd en geïnteresseerd zijn. We zullen echter niet langer in algemene beschouwingen verwijlen, maar liever in concreto uiteen gaan zetten, welke historische onderwerpen voor a.s. docenten in wiskunde van belang moeten worden geacht.

1. *Pre-Helleense wiskunde*

De studie van de pre-Helleense (i.h.b. de Egyptische en de Babylonische) wiskunden moet om verschillende redenen een belangrijk bestanddeel van de historische vorming van de a.s. docent zijn. Beide culturen leveren een bijdrage tot de kennis van de manieren waarop men getallen in woorden kan uitdrukken en met behulp van cijfers kan schrijven. Naast het zuiver-decimale stelsel van de Egyptenaren staat het gemengde decimaal-sexagesimale der Babyloniërs; naast het Egyptische systeem van additieve iuxtapositie der cijfers het Babylonische positiestelsel. Instructief is ook beider behandeling van breuken: de Egyptenaren werken met sommen van stambreuken, de Babyloniërs passen de positiegedachte ook op hun sexagesimale breuken toe. Hun methode is in de tijdmeting en in de astronomie blijven voortbestaan. Van belang zijn ook de behandelde vraagstukken: men kan zich heel goed voorstellen, dat ze aanvankelijk uit de behoeften van het praktische leven zijn voortgekomen (loonberekeningen, berekeningen over grondwerk en derg.), maar men ziet ze al spoedig elk contact met de praktijk verliezen en het karakter verkrijgen van oefenvoorbeelden die alleen ter wille van de uit te voeren berekeningen worden opgegeven. In de Babylonische wiskunde worden algemene methoden toegepast, die echter niet algemeen worden geformuleerd, laat staan in algemene vorm worden afgeleid. Men ziet hier ook reeds een notatie voor de onbekende optreden die zich onmiddellijk in algebraïsche vorm laat uitdrukken. Dit werkt het optreden van lange reeksen van oefenvoorbeelden in de hand waarin telkens eenzelfde methode wordt toegepast, die de leerling blijkbaar al doende leert hanteren. In het bijzonder geschiedt dit voor bepaalde typen van vierkantsvergelijkingen.

Literatuur:

Kurt Vogel, *Vorgriechische Mathematik I. Vorgeschichte und Ägypten. II. Die Mathematik der Babylonier*, Hannover und Paderborn, z.j.

L. N. H. Bunt e.a. 4, *Van Ahmes tot Euclides.* Hoofdstukken uit de geschiedenis der wiskunde, Groningen[3], 1964.

Voor de geschiedenis van teltaal en cijferschrift in het algemeen kan warm worden aanbevolen: Karl Menninger, *Zahlwort und Ziffer.* Eine Kulturgeschichte der Zahl, Göttingen[2], 1958.

2. *Griekse wiskunde*

De Griekse wiskunde behoort tot de voornaamste onderwerpen in de historische vorming van de a.s. docent. Op alle gebieden van het weten voert het onderzoek naar de wordingsgeschiedenis van de tegenwoordige wetenschap terug naar Hellas, maar dit is wel in het bijzonder het geval voor de wiskunde. De structuur van onze elementaire wiskunde is Grieks van oorsprong. Dit geldt speciaal voor de meetkunde, waar wij aan de Hellenen het fundamentele denkbeeld van de opbouw van een mathematisch systeem door logische redenering op grond van uitdrukkelijk geformuleerde definities en axiomata te danken hebben.

Deze bewering blijft haar volledige geldigheid behouden wanneer van wiskundige zijde — volkomen terecht — wordt opgemerkt, dat hetgeen tegenwoordig op school aan meetkunde wordt bedreven met een axiomatische theorie in de moderne zin van het woord alleen het woord axioma gemeen heeft. Immers dit houdt niet in, dat de hedendaagse axiomatische methode niet in een continue nimmer onderbroken ontwikkeling uit de opbouw die Euclides geeft, zou zijn voortgekomen. Men kan inderdaad de genetische samenhang van beide evenmin ontkennen als men kan volhouden, dat de antieke atomistiek haar belang voor de hedendaagse fysica verloren zou hebben, omdat het woord atoom in de ononderbroken loop der geschiedenis langzamerhand totaal van betekenis veranderd is.

Voor de a.s. leraar moet dus een soliede kennis van de Griekse wiskunde als volstrekt onmisbaar worden beschouwd. Zowel waar hij haar nog steeds navolgt — meer dan hij denkt — als waar hij van haar afwijkt — wellicht minder dan uit didactische oogpunt wenselijk zou zijn — moet hij weten wat hij doet. Daartoe is bekendheid met het historisch verloop volstrekt onmisbaar.

Na een niet te summiere behandeling van wat over de pre-Euclidische wiskunde indirect bekend is geworden (waarbij o.m. de nodige aandacht zal moeten worden besteed aan de waarschijnlijke invloed van de Platoonse wijsbegeerte, tot op heden toe een punt van hevig meningsverschil) zal een volledig overzicht van de *Elementen* van Euclides gegeven dienen te worden. Zijn systeem van grondslagen (definities, postulaten, axiomata) vereist een behandeling die historisch volledig behoort te zijn, maar die zich niet tot het historische zal mogen beperken. Het is van belang dat zij ook kritisch van aard zij, doordat zij 1) op de tekortkomingen wijst die binnen het systeem aangewezen kunnen

worden en daarin in de loop der geschiedenis inderdaad ook aangewezen zijn, 2) de niet steeds in voldoende mate erkende verdiensten aanwijst die er aan eigen zijn, 3) de principiële verschillen doet uitkomen waardoor de moderne opvatting van een axiomatisch systeem zich van de antieke onderscheidt. In het bijzonder zal de behandeling van het parallelenpostulaat aanleiding kunnen geven tot een beschouwing over de niet-Euclidische meetkunden en hun historische betekenis.

Het verdient verder aanbeveling, in te gaan op de eigenaardigheden die de meetkunde van Euclides vertoont in verband met de strenge opvattingen van de Grieken over het irrationale. Deze vertonen zich in de eerste plaats in de stelselmatige vermijding van arithmetische en algebraïsche methoden, verder in het zolang mogelijk vermijden van het redenbegrip (met belangrijke gevolgen voor de opbouw van de meetkunde) en in de eigenaardige behandeling daarvan in de van Euxodos afkomstige redentheorie in Boek V. In verband hiermee vindt men in Boek VI een geheel meetkundig ingeklede theorie van de vierkantsvergelijking.

In de boeken VII—IX (die waarschijnlijk van Pythagoreïsche oorsprong zijn) wordt dan het redenbegrip voor gehele getallen opnieuw behandeld en tot grondslag voor de getallentheorie gemaakt.

Het hierna volgende boek X verdient voornamelijk aandacht als voorbeeld van een ver uitgewerkte theorie, die lang als belangrijk gegolden heeft en ondanks de grote moeilijkheden die er aan verbonden waren, uitvoerig is bestudeerd, maar die uit de hedendaagse wiskunde spoorloos verdwenen is; het gaat, kort gezegd, om een classificatie van irrationaliteiten naar qualitatieve gezichtspunten. Van de stereometrische boeken XI—XIII is het belangrijkste de van Euxodos afkomstige methode ter behandeling van oneindige processen, die men gewoonlijk aanduidt met de 17e-eeuwse naam van van exhaustie-methode, de verkeerdste naam die men had kunnen bedenken daar de methode berust op het heldere inzicht in het inexhaustibele (het onuitputtelijke) van het oneindige. Een nauwkeurige behandeling van de Griekse opvattingen op dit gebied, aanknopend aan de oneindigheidsparadoxen van de Eleaat Zenoon is, mede met het oog op de 17e-eeuwse wiskunde, gewenst.

De hoogtepunten van de Griekse wiskunde na Euclides worden bereikt in het werk van Archimedes en Apollonios, waarvan de eerste als wegbereider van de latere integraalrekening kan worden beschouwd en de tweede als grondlegger van de analytische meetkunde. Door een bespreking van het werk van Archimedes kan o.m. de voor de gehele verdere ontwikkeling der wiskunde

fundamentele vraag naar de betrekkelijke waarde van strenge exactheid en onstrenge aanschouwelijkheid worden verhelderd. Kennismaking met de methoden van Apollonius kan doen inzien, hoe de Griekse wiskundigen er in slaagden, de leer der kegelsneden zover te ontwikkelen, dat daaraan voor de 17e eeuw niets wezenlijk nieuws kon worden toegevoegd.

Van eminente waarde voor a.s. docenten in wiskunde is de kennismaking met de Griekse trigonometrie, die onder de naam Sphaerica als onderdeel der astronomie ontwikkeld werd. Men beleeft hier aan een sprekend voorbeeld het grote belang van een doelmatige notatie. Terwijl namelijk de Sphaerica er in slaagt, zowel vlakke als ruimtelijke trigonometrische problemen te behandelen, blijft haar uitdrukkingswijze een hinderpaal voor de ontwikkeling. Het voortdurend gebruik van de term „halve koord van de dubbele boog", waar men later sinus zou leren zeggen en in verband daarmee de samenstelling en het gebruik van koorden — in plaats van sinustafels blijkt een sterk vertragende werking uit te oefenen. Voor de berekening van de koordentafels blijkt de stelling van Ptolemaeus voor de koordenvierhoek onmisbaar te zijn. Dat zij in de planimetrie nog steeds in ere wordt gehouden, hoewel ze haar oorspronkelijke functie al lang verloren heeft, vormt een sprekend voorbeeld van de neiging tot verstarring in de traditie die de schoolwiskunde kenmerkt. Van de talrijke andere onderwerpen uit de Griekse wiskunde die tot de historische vorming van a.s. docenten kunnen bijdragen, mogen nog twee in het bijzonder genoemd worden. Het eerste wordt gevormd door de drie klassieke niet met passer en liniaal oplosbare problemen die de Griekse wiskundigen hebben bezig gehouden (trisectie van een hoek, verdubbeling van de kubus, kwadratuur van de cirkel) en waardoor zij de ontwikkeling van de wiskunde sterk hebben bevorderd. Het tweede bestaat uit de arithmetica van Diophantos. Men vindt hierin een oplossingsmethode van vierkantsvergelijkingen die blijkbaar aan de Babylonische wiskunde ontleend is en die er van getuigt, dat de oude rekenmethoden (blijkbaar) in Alexandrië in zwang zijn gebleven, naast de wiskunde van Euclides, Archimedes en Apollonius. En vervolgens blijkt het werk van Diophantos een bijdrage te leveren tot het ontstaan van het arithmetische en algebraïsche tekenschrift dat in de werken van de genoemde wiskundigen in het geheel niet tot verdere ontwikkeling was gekomen.

In aansluiting op de behandeling van de Griekse wiskunde behoort ook aandacht te worden gewijd aan de Griekse mechanica en astronomie, zowel om beider inhoud als om de Griekse opvattingen

over hun relatie tot de wiskunde. Deze hebben ten gevolge gehad, dat het eerste vak gedurende lange tijd als een onderdeel der wiskunde is beschouwd en ze hebben voor het tweede door de onderscheiding van mathematische en fysische astronomie sterk bepalend op de inhoud gewerkt.

Literatuur:

T. Heath, *A History of Greek Mathematics*, 2 vol., Oxford, 1921.
E. J. Dijksterhuis, *De Elementen van Euclides*, 2 vol., Groningen, 1929—1930.
E. J. Dijksterhuis, *Archimedes*, Kopenhagen, 1956.
Oskar Becker, *Das mathematische Denken der Antike*, Göttingen, 1957.
P. Lorenzen, *Die Entstehung der exakten Wissenschaften*, Berlin, 1960.
L. N. H. Bunt e.a., *Van Ahmes tot Euclides*, Groningen[3], 1960.

3. *Het doordringen van de wiskunde naar West-Europa*

Na de Griekse wiskunde behoort over de drie verschillende wegen te worden gesproken waarlangs de kennis van het mathematisch werk der Oudheid in West-Europa is doorgedrongen en over de toevoegingen die het daarbij heeft ondergaan. Het zijn de Romeinse, de Byzantijnse en de Arabische weg waarvan de eerste twee voornamelijk conserverend hebben gewerkt, terwijl de derde vele zelfstandige bijdragen heeft geleverd. Hier is dus vooral een overzicht van de geschiedenis der Arabische wiskunde op zijn plaats, voornamelijk voorzover deze andere doeleinden vervolgt dan het in stand houden en uitbreiden van Griekse wetenschap. In de eerste plaats is de invoering van het Indo-Arabische cijferschrift van belang dat het positiestelsel voor gehele getallen (merkwaardig genoeg niet, zoals in het Babylonische schrift wel gebeurd was, (voor breuken) toepast; voorts de verdere ontwikkeling van de goniometrie en de algebra. Tevens kan hier aanleiding worden gevonden voor een bespreking van de Indische wiskunde.

De Westeuropese wiskunde staat in deze tijden nog ver achter bij die van het nabije Oosten. Zij begint eerst van belang te worden in de 14e eeuw (de school der Mertonenses in Oxford, die der Terministen in Parijs). Daarop volgt dan de opbloei der algebra in Italië (16e eeuw) die een sterke invloed in het Westen van Europa uitoefent. In het bijzonder zal aandacht moeten worden besteed aan Stifel in Duitsland, Vieta in Frankrijk en Simon Stevin in de Nederlanden.

Literatuur:

B. Datta, *The science of the Sulba*, Calcutta, 1932.
A. Mieli, *La science arabe et son rôle dans l'évolution scientifique mondiale*, Leiden, 1938.

De Lacy O'Leary, *How Greek science passed to the Arabs*, London, 1948.
H. J. J. Winter, *Eastern science*, London, 1952.
E. J. Dijksterhuis, *Simon Stevin*, 's-Gravenhage, 1943.

4. *De ontwikkeling der wiskunde in de* 17*e eeuw*

Wij zijn nu genaderd tot de voor de ontwikkeling der wiskunde uiterst belangrijke 17e eeuw, waarin de beoefening van het vak zich aanzienlijk uitbreidt. We sommen een aantal onderwerpen op die op dit gebied behandeld zullen kunnen worden.

a. toepassing van de algebra op de meetkunde; analytische meetkunde;
b. logaritmen en verwante onderwerpen.;
c. indivisibilia; voorbereiding van de integraalrekening;
d. raaklijnen en extreme waarden; voorbereiding van de differentiaalrekening;
e. wiskundige strengheid;
f. individuele mathematici;
g. toepassing van de wiskunde in de mechanica.

a. Lectuur van het essay *La Géométrie* van Descartes met het *Discours de la Méthode* als inleiding kan hier nuttige diensten bewijzen. Het kan bijdragen tot het opheffen van talrijke verkeerde voorstellingen die over Descartes en zijn werk in omloop zijn en de wenselijkheid helpen demonstreren, zo mogelijk steeds terug te gaan tot de oorspronkelijke bron. Daaraan staan hier, wat in de 17e en 18e eeuw nog een vrij grote zeldzaamheid is, geen taalkundige moeilijkheden in de weg. Het verdient aanbeveling, ook kennis te nemen van Fermat's verhandeling *Ad locos planos et solidos isagoge.*

b. Ter verruiming van het begrip logaritme is het gewenst de oorspronkelijke behandeling door Napier te leren kennen en niet onmiddellijk met Euler het logaritme-nemen te beschouwen als een der omgekeerden van de machtsverheffing. Aan de behandeling van de logaritme kan een uiteenzetting van theorie en praktijk van de rekenliniaal worden verbonden, waarbij een excursie op het gebied van de instrumentele hulpmiddelen bij het rekenen voor de hand ligt.

c. De methode der indivisibilia, die haar wortels heeft in de Griekse oudheid en haar eerstvolgende ontwikkeling in de Middeleeuwen, komt in de 17e eeuw door het werk van Kepler, Cavalieri, Torricelli, Roberval, Pascal, Huygens en anderen tot grote bloei. Het is gewenst haar inhoud uiteen te zetten en na te gaan, in hoeverre zij de integraalrekening voorbereidt.

d. Het laatste geldt ook voor de 17e-eeuwse methoden ter bepaling van raaklijnen en extreme waarden, ten opzichte van de differentiaalrekening.

e. Op dit punt van de historische ontwikkeling bestaat een ongedwongen aanleiding, het begrip wiskundige strengheid ter sprake te brengen. Men kan aan het werk van figuren als Huygens, Torricelli, Barrow etc. laten zien, hoe de zorg voor exactheid in het wiskundig bewijs ten nadele van de creativiteit kan werken en hoe wenselijk het voor de ontwikkeling van het vak kan zijn, de al te hoge strengheidseisen tijdelijk op zij te zetten. Een terugblik op de Griekse wiskunde (Archimedes) leert, hoe deze kwestie daar al behandeld werd. In de 18e eeuw zal de tijdelijke verslapping van de exactheidseisen een heilzame invloed op de ontwikkeling van de differentiaal- en integraalrekening blijken uit te oefenen. De 19e eeuw brengt dan een ook weer heilzame reactie.

f. Als individuele mathematici, bij de behandeling waarvan zowel het werk met vrucht zal kunnen worden besproken als ook biografische bijzonderheden kunnen worden behandeld, noemen wij zonder aanspraak op volledigheid: Desargues, Pascal, Torricelli, Roberval, de Sluse, Wallis, Barrow en Huygens.

g. Door het werk van o.m. Stevin, Galilei en Huygens wordt de mechanica hoe langer hoe meer binnen de invloed van de zuivere wiskunde getrokken. Het is wenselijk, dat dit proces aandachtig wordt bestudeerd en kritisch bekeken. Ook hier blijkt een conflict te bestaan tussen exactheid en aanschouwelijkheid.

Literatuur:

D. J. Struik, *A concise history of mathematics*, New York, 1948.
Oskar Becker und Jos. E. Hofmann, *Geschichte der Mathematik*, Bonn, 1951.
J. E. Hofmann, *Geschichte der Mathematik*, Sammlung Göschen, 226, 875, 882.

5. *De geschiedenis der wiskunde in de* 18e *eeuw*

Het terrein der wiskunde gaat zich nu langzamerhand zozeer verbreden, dat van een enigszins volledige behandeling van haar geschiedenis geen sprake meer kan zijn. Men zal zich tot capita selecta moeten bepalen.

Er is echter één onderwerp, dat onder alle omstandigheden aan de orde gesteld zal moeten worden, namelijk de ontwikkeling van de differentiaal- en integraalrekening. Dit is bij de bespreking van de 17e eeuw reeds voorbereid, maar zal tegen het einde daarvan de volle aandacht opeisen om deze in de 18e eeuw te blijven boeien. Er zal eerst duidelijk uiteengezet moeten worden, waaruit precies

de bijdragen van de twee hoofdfiguren, Newton en Leibniz, hebben bestaan, waarop dan een niet te beknopte behandeling van het werk van Jacob en Johann Bernoulli zal moeten volgen.

De nauwkeurige bespreking van hun gezamenlijk werk leert de betekenis van de voor het menselijk denken zo ontzaglijk belangrijke vondst van de infinitesimaalrekening beseffen, vooreerst uit zuiver mathematisch oogpunt, dus als intern-mathematische methode van grote draagwijdte, vervolgens echter ook om de algemene cultuurhistorische betekenis die haar toepassing op allerlei gebieden van het weten is gebleken te bezitten. Zowel de technische ontwikkeling van het vak als de logische fundering van de toegepaste methoden verdient de belangstelling. De met de infinitesimaalrekening nauw verbonden variatierekening is historisch bijna geheel in het leven gekomen naar aanleiding van problemen die tot de mechanica behoren en kan dus ook het beste in verband met de historische ontwikkeling van dit vak behandeld worden. Het werk van Leibniz en de gebroeders Bernoulli levert hiertoe voldoende aanknopingspunten.

De getallentheorie, die in de 17e eeuw reeds tot bloei is gekomen door het werk van Fermat, krijgt in de 18e eeuw een sterke vooruitgang door toedoen van L. Euler. Van beider bijdragen kunnen de hoofdzaken behandeld worden, waarna nog een indruk kan worden gegeven van de vorderingen, die door Legendre en Gauss bereikt worden. In de 18e eeuw hoort ook de beoefening van de beschrijvende meetkunde door Monge thuis. De behandeling van zijn werk kan een afsluiting vormen van een historisch overzicht van de ontwikkeling van het vak sinds de Italiaanse Renaissance.

Van belang voor de 18e eeuw is voorts het werk van A. de Moivre, zowel voor de waarschijnlijkheidsrekening als voor de actuariële wetenschap. Een onuitputtelijke bron voor historisch onderzoek wordt hierna gevormd door het werk van L. Euler. Bij de behandeling daarvan doet zich echter het hieronder meer algemeen geformuleerde bezwaar gelden, dat men de te behandelen stof niet meer bekend mag onderstellen, zodat de grens tussen een historische uiteenzetting en een actueel-mathematisch betoog begint te vervagen.

Wij bereiken hier langzamerhand het punt waarop wij de verplichte historische vorming voor a.s. docenten beëindigd zouden willen zien. Er is natuurlijk nog ruimschoots stof voor historische studie, maar de bestudering van de historische ontwikkeling begint nu zozeer samen te vallen met die van de wiskunde zelf, dat een afzonderlijke behandeling ervan op grote moeilijkheden zou gaan

stuiten. Het zou niet langer mogelijk zijn, de stof waarvan men de historische ontwikkeling wil behandelen, bij de toehoorders bekend te onderstellen. Men zou als het ware leerboeken der wiskunde op historische grondslag moeten gaan samenstellen inplaats van uiteenzettingen over de historische methoden te geven. Dat zou ongetwijfeld zekere voordelen boven de gebruikelijke systematische behandeling hebben, maar het zou niet geëist kunnen worden, dat alle a.s. docenten deze methode volgden. Vandaar, dat wij het ontwikkelde programma met het einde van de 18e eeuw in hoofdzaak zouden willen besluiten. Dit houdt natuurlijk niet de bewering in, dat verscheidene onderwerpen uit de 19e eeuwse wiskunde zich niet heel goed voor een bestudering zoals die voor de voorafgaande eeuwen geschetst is, zouden lenen. Wij volstaan met twee voorbeelden aan te geven: de reeds eerder vermelde schepping van de niet-Euclidische meetkunden (met haar voorgeschiedenis in de 18e eeuw) en de opbouw van de projectieve meetkunde. Het onvredigende dat in deze wijze van besluiten van het historisch overzicht gelegen is (men leert geen afsluiting kennen maar ziet tegen het einde alleen nog maar enkele losse onderwerpen behandelen) is even onmiskenbaar als onvermijdelijk. Het ligt echter in het wezen van een historische studie die als aanvulling van een actueel wetenschappelijke bestudering van de levende wetenschap der wiskunde gedacht is en die meer met het oog op de behoeften van de a.s. docenten dan uit zuiver wetenschappelijke overwegingen ontworpen is.

Literatuur (naast de reeds vermelde werken van Becker-Hofmann en Struik).

H. W. Turnbull, *The mathematical discoveries of Newton*, London-Glasgow, 1945.
Jos. E. Hofmann, *Die Entwicklungsgeschichte der Leibnizschen Mathematik*, München, 1949.
Jos. E. Hofmann, *Jacob Bernoulli's Beiträge zur Infinitesimalmathematik*, Genève, 1956.
Hk. de Vries, *Historische Studiën*, 3 dln., Groningen, 1926, 1934, 1940.

SPITSVONDIGHEDEN IN DE KLASSIEKE GETALLENTHEORIE [1])

door

Dr. P. Bronkhorst

Eindhoven

Daar van getallentheorie vrijwel niets algemeen bekend mag geacht worden, begin ik met een korte elementaire inleiding. Als resultaat zal ik één symbool en één formule verder nodig hebben.

De schrijfwijze $17 \equiv 2 \pmod 5$, 17 is congruent 2 modulo 5, is wel bekend genoeg; ze betekent dat $17 - 2$ door 5 deelbaar is.

De congruentie $x \equiv 2 \pmod 5$ heeft dus tot wortels: . . . -8, -3, 2, 7, ... Wanneer heeft de congruentie $x^2 \equiv a \pmod p$, waarin p een oneven priemgetal is en $(a, p) = 1$ (d.i. GGD van a en p is 1) ondersteld wordt, wortels? Stel x en y voldoen; dan is $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ deelbaar door p. Dus $y \equiv x$ of $y \equiv -x \pmod p$; er zijn dus *hoogstens* 2 klassen van wortels.

Voorbeeld: $p = 11$; $(a, 11) = 1$; $x^2 \equiv a \pmod{11}$. We laten x de waarden 1, 2, 3, . . ., 10 doorlopen en bepalen de rest bij deling van x^2 door 11.

x	1	2	3	4	5	(6	7	8	9	10)
x^2	1	4	9	5	3	(3	5	9	4	1)

We noemen de getallen $1 + 11n$, $4 + 11n$, enz. kwadraatresten mod 11; de verzameling ervan heet R. We noemen 2, 6, 7, 8, 10 niet-resten mod 11; evenzo $2 + 11n$, enz.; de verzameling hiervan heet N.

$x^2 \equiv a \pmod{11}$ heeft dus 2 klassen van wortels als $a \in \mathrm{R}$ en nul klassen van wortels als $a \in \mathrm{N}$.

Een merkwaardigheid is, dat van de kwadraatresten mod 11 die tussen 0 en 11 liggen er 4 kleiner en 1 groter zijn dan 11 : 2. Inderdaad geldt voor alle priemgetallen $p \equiv 3 \pmod 4$, dat van de kwadraatresten tussen 0 en p er meer kleiner dan $\frac{1}{2}p$ zijn dan groter. Voor priemgetallen $p \equiv 1 \pmod 4$ zijn deze aantallen precies gelijk. Dit laatste zal ik straks aantonen; het eerste is, voorzover mij bekend, nog nooit elementair bewezen, maar volgt als „bijprodukt" aan het eind van mijn voordracht.

[1]) Lezing gehouden op de jaarvergadering van Wimecos op 28 december 1965.

Verder zien we, dat het produkt van twee kwadraatresten en eveneens het produkt van twee niet-resten een kwadraatrest geeft. Het produkt van een kwadraatrest met een niet-rest blijkt telkens een niet-rest te geven. Om dit te bewijzen hebben we de stelling van Fermat nodig. Als p een oneven priemgetal is en $(a, p) = 1$, dan is $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Voor het bewijs van deze stelling is, zoals E. T. Bell in zijn "*Men of Mathematics*" opmerkt, slechts heel weinig kennis nodig, maar, voegt hij er aan toe, niet meer dan tien van een miljoen verstandige mensen zouden het vinden binnen een redelijke tijd, zeg een jaar!

Stel $p = 7$; $1.2.3.4.5.6 \equiv x \pmod 7$; (a, 7) = 1; a.2a.3a.4a.5a.6a $\equiv y \pmod 7$. Alle factoren van het laatste produkt zijn onderling incongruent modulo 7; er zijn echter slechts 6 restklassen modulo 7, die ongelijk 0 zijn; dus komen alle 6 voor; bijgevolg is $y \equiv x \pmod 7$. Dus is $6!(a^6 - 1)$ deelbaar door 7; hieruit volgt het gevraagde; het algemene bewijs gaat net zo! Als nu a kwadraatrest modulo p is, volgt dat er een x is met:

$x^2 \equiv a \pmod{p}$; dus $a^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$; voor een niet-rest b is: $b^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv -1 \pmod{p}$; op het — overigens elementaire — bewijs ga ik niet in.

Als dus b.v. a kwadraatrest en b niet-rest is, volgt: $(ab)^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv 1.-1 \equiv -1 \pmod{p}$. Dus is ab een niet-rest. De eigenaardigheid, waar ik zoëven over sprak, is nu reeds te bewijzen; stel nl. $p \equiv 1 \pmod 4$; a kwadraatrest mod p; dan is: $(-a)^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv (-1)^{\frac{1}{2}(p-1)} \cdot (a)^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv 1.1 \equiv 1 \pmod{p}$; dus is ook $-a$ en dus verder $p - a$ kwadraatrest. Zo zijn b.v. de kwadraatresten mod 13 de getallen: 1 en 12; 4 en 9; 3 en 10.

De volgende symbolen krijgen nu zin:

Legendre: p oneven priem;

$$\left.\begin{array}{lll} (a, p) = 1; & a \in \mathrm{R} & (a/p) = 1 \\ (a, p) = 1; & a \in \mathrm{N} & (a/p) = -1 \end{array}\right\} (a/p) \equiv a^{\frac{1}{2}(p-1)} \pmod{p}$$

$$(a, p) > 1; \qquad (a/p) = 0 .$$

Eigenschappen:

(a/p) heeft periode p: $(a + p/p) = (a/p)$; $(ab/p) = (a/p)(b/p)$ (multiplicatief).

Jacobi:

$b =$ oneven getal; $b = pq \ldots$ ($p, q, \ldots$ priemdelers); $(a/b) = (a/p)(a/q) \ldots$

Eigenschappen:

periode b: $(a + b/b) = (a/b)$ multiplicatief: $(ac/b) = (a/b)(c/b)$.

N.B. $(a/b) = 1$ betekent niet noodzakelijk, dat a een kwadraatrest mod b is; b.v. $(a/15) = (a/3)(a/5)$; stel nu a niet-rest mod 3 en niet-rest mod 5; dan is $(a/15) = -1 . -1 = 1$; echter uit $x^2 \equiv a$ (mod 15) zou volgen $x^2 \equiv a$ (mod 3).
Tegenspraak.
Kronecker: $(a/2) = 1$, als $a \equiv 1$ (mod 8); -1, als $a \equiv 5$ (mod 8);
$(a/2) = 0$, als a even; voor andere a is $(a/2)$ niet gedefinieerd.
Tenslotte stellen we voor $a \neq 0$, $(a/1) = 1$.

We hadden: $x^2 \equiv a$ (mod p); $(a, p) = 1$; p oneven priem; 2 klassen wortels, als a een kwadraatrest mod p en geen wortels als a een niet-rest mod p was; stellen we nog de voorwaarde $0 < x < p$, dan zijn er resp. 2 en 0 wortels. Dit aantal $E(a) = 1 + (a/p) = (a/1) + (a/p) = \sum_{f|p} (a/f)$; dus een som waarin f de delers van p doorloopt. We nemen nu de congruentie: $x^2 \equiv a$ (mod p^n); p oneven priem; $(a,p) = 1$; $0 < x < p^n$. Merkwaardig is, dat het aantal wortels nu weer $1 + (a/p)$ is; voor het bewijs verwijs ik naar elementaire leerboeken. $E(a) = \sum_{\substack{f|p \\ f \text{ kwadraatvrij}}} (a/f)$; met „kwadraatvrij" worden getallen bedoeld, die niet door een kwadraat deelbaar zijn.
Nu $x^2 \equiv a$ (mod 35) (1); $(a, 35) = 1$; $0 < x < 35$.
Nodige voorwaarden zijn:

$x^2 \equiv a$ (mod 5) (2) en $x^2 \equiv a$ (mod 7) (3).

Deze voorwaarden zijn tevens voldoende; als immers $x^2 - a$ deelbaar is door 5 en door 7, dan ook door 35.

Stel x_1 voldoet aan (2) en x_2 aan (3). We bepalen nu r zodanig, dat $x = x_1 + 5r \equiv x_2$ (mod 7) wordt. We laten daartoe r de getallen $0, 1, \ldots, 6$ doorlopen; de resten mod 7 worden dan alle verschillend; dus is er juist één r, die aan de vraag voldoet. De gevonden waarde x voldoet aan (2) en (3), dus aan (1). Bij ieder paar $(x_1; x_2)$ hoort dus juist één x (mod 35).

$E(a) = (1 + (a/5)) \cdot (1 + (a/7)) = 1 + (a/5) + (a/7) + (a/35)$.
$E(a) = \sum_{f|35} (a/f)$.

Zonder nu verder de details uit te werken is de volgende formule wel duidelijk:
$x^2 \equiv a$ (mod b); b oneven; $(a, b) = 1$; $0 < x < b$; $E(a) = \sum_{\substack{f|b \\ f \text{ kwadraatvrij}}} (a/f)$.

Wanneer b een even getal is, moet er nog wat gerekend worden, niet moeilijk, maar ook niet interessant. Het resultaat is de formule die ik verder nodig heb.

Stel: $d \equiv 0$ of $1 \pmod 4$; $(k, d) = 1$; $0 \leqq x < 2k$; dan is het aantal wortels van de congruentie: $x^2 \equiv d \pmod{4k}$ gelijk aan:

$$E(k) = \sum_{\substack{f|k \\ f \text{ kwadraatvrij}}} (d/f).$$

Ik kom nu tot mijn eigenlijke voordracht, waarbij ik Uw belangstelling hoop te wekken, voor wat Edmund Landau in zijn „*Vorlesungen über Zahlentheorie*" het mooiste noemt, wat hij zijn lezers te brengen heeft. Zijn boek bestaat uit 3 banden; mijn voordracht gaat over Teil IV van Band I.

We beschouwen:

$F(a, b, c) = ax^2 + bxy + cy^2$; a, b, c, x en y zijn gehele getallen.

$(a, b, c) = 1$ (GGD van a, b en c is 1).

$d = b^2 - 4ac$ heet de discriminant; d is geen kwadraat (anders is F te ontbinden); direct is te zien: $d \equiv 0$ of $1 \pmod 4$.

F(a, b, c) heet een binaire kwadratische vorm; ik zal bij afkorting over „vorm" spreken.

De lineaire transformatie: $x = pX + qY$

$y = rX + sY$

heet modulair, als p, q, r en s geheel zijn en $ps - qr = 1$.

Twee vormen, die door een modulaire transformatie in elkaar kunnen overgaan, noemen we equivalent. Dat de voorwaarden voor een equivalentie vervuld zijn, volgt direct uit de bekende eigenschap dat de determinant van de transformatie, die het produkt van 2 lineaire transformaties is, gelijk is aan het produkt der determinanten, dus hier $1.1 = 1$.

Een merkwaardige eigenschap is, dat bij deze modulaire transformaties de discriminant invariant is. Men kan dit door gewoon rekenen bewijzen; heel eenvoudig gaat het met matrix-rekening.

Alle vormen, die equivalent zijn met een gegeven vorm, en dus ook onderling, vormen een klasse. We gaan nu uit van een gegeven d en bewijzen eerst dat het aantal klassen eindig is. Hierbij maken we gebruik van de getallen die door een vorm kunnen worden aangenomen. B.v. $x^2 + y^2 = 5$ is mogelijk, echter niet $x^2 + y^2 = 7$.

Als voor een bepaalde x_0 en een bepaalde y_0, $ax_0^2 + bx_0y_0 + cy_0^2 = k$ is, dan zegt men dat dit een voorstelling van het getal k door de vorm F is. Equivalente vormen stellen dezelfde verzameling getallen voor. Immers; bij gehele x en y horen gehele X en Y, en omgekeerd!

Willen we dus weten welke getallen door de vormen van eenzelfde klasse worden voorgesteld, dan behoeven we slechts één representant er uit te kiezen.

Van alle getallen $k (\neq 0)$ die door een gegeven F worden voorgesteld is er één of zijn er twee met de kleinste modulus. We nemen er één van, a'. Dus $ax_0^2 + bx_0y_0 + cy_0^2 = a'$ $(x_0, y_0) = 1$; anders was de modulus van a' niet minimaal.

Er zijn dus getallen q en s te vinden, zodat $x_0s - qy_0 = 1$.

$$x = x_0X + qY$$
$$y = y_0X + sY$$

is dus een modulaire transformatie. F gaat over in:

$$G = a'X^2 + eXY + fY^2.$$

Een nieuwe transformatie $\begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ laat de eerste coëfficiënt ongewijzigd; de tweede wordt: $b' = 2a'h + e$; we kunnen dus h zo kiezen dat $|b'| \leqq |a'|$. Er komt dan $H = a'x^2 + b'xy + c'y^2$; hierin volgt c' uit de invariantie van d.

Voor $x = 0$ en $y = 1$ volgt $H = c'$, zodat $|c'| \geqq |a'|$ (wegens minimum eig. v. $|a'|$).

In iedere klasse ligt dus een vorm waarvan de coëfficiënten a, b, c (we laten de accenten maar weer weg) voldoen aan: $|b| \leqq |a| \leqq |c|$.

Dus $4b^2 \leqq 4a^2 \leqq |4ac| = |b^2 - d| \leqq b^2 + |d| \leqq a^2 + |d|$

dus: $3a^2 \leqq |d|$; dus $a \leqq \sqrt{\tfrac{1}{3}|d|}$.

Het aantal a's is dus eindig, dus vanzelf het aantal b's; bij ieder stel a; b hoort tenslotte juist één c.

Voorbeeld. $d = -4$; $b^2 - 4ac = -4$; $|b| < 2$; dus alleen $b = 0$ en $a = c = 1$ of -1. We spreken echter af, dat we bij negatieve d alleen de positief-definiete vormen zullen beschouwen. Dus alleen $a = c = 1$.

We hebben dus bij $d = -4$ één klasse. Alle vormen met $d = -4$ zijn equivalent en nemen dus dezelfde verzameling waarden aan. B.v. $F = x^2 + y^2$; $G = 5x^2 + 24xy + 29y^2$. Nu wordt $F = 13$ voor b.v. $x = 2$ en $y = 3$. Dus moet ook $G = 13$ kunnen worden. Om de wortels te vinden passen we een paar transformaties toe; $\begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ geeft: $5(x + hy)^2 + 24(x + hy)y + 29y^2$; de coëfficiënt van xy wordt $10h + 24$; kies $h = -2$; er komt dan $5x^2 + 4xy + y^2$; nu nog $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ dan wordt de vorm: $x^2 + y^2$. Door terug rekenen

vindt men dan als wortels van de gegeven vergelijking b.v. $x = -19$; $y = 8$.
Voorbeeld: $d = -23$; $b^2 - 4ac = -23$; $|b| \leqq 2$; dus $b = 1$ of -1; $ac = 6$. Dus

b	a	c
-1	1	6
-1	2	3
$+1$	1	6
$+1$	2	3

Een eenvoudige berekening laat zien dat de eerste en de derde equivalent zijn; de overblijvende niet. We hebben 3 klassen met b.v. als representanten:

I $x^2 + xy + 6y^2$; II $2x^2 + xy + 3y^2$; III $2x^2 - xy + 3y^2$.

Het probleem is nu verder een formule te vinden voor het aantal klassen bij een gegeven d. Daar de berekeningen voor $d < 0$ eenvoudiger zijn, alhoewel niet sterk verschillend van die voor $d > 0$, nemen we voortaan $d < 0$ en bovendien $a > 0$ en $c > 0$; dus positief-definiete vormen.

We nemen dus een vast getal $d < 0$; verder een $k > 0$ en zoeken voorstellingen van k door representanten van vormenklassen; d.w.z. we kiezen uit iedere klasse één representant, bepalen het aantal voorstellingen van k door iedere representant en tellen de resultaten op. We noemen dit aantal het aantal voorstellingen van k door een representantensysteem.
Voorbeeld: $d = -23$; $k = 16$.

Klasse I: $x^2 + xy + 6y^2 = 16$. Wortels: $(4; 0)$; $(-4; 0)$
Klasse II: $2x^2 + xy + 3y^2 = 16$. Wortels: $\underline{(1; 2)}$; $\underline{(-1; -2)}$; $(2; -2)$; $(-2; 2)$
Klasse III: $2x^2 - xy + 3y^2 = 16$. Wortels: $\underline{(1; -2)}$; $\underline{(-1; 2)}$; $(2; 2)$; $(-2; -2)$

We onderscheiden eigenlijke voorstellingen, waarvoor $(x_0, y_0) = 1$ en oneigenlijke waarvoor $(x_0, y_0) > 1$ geldt. In ons voorbeeld zijn de eigenlijke voorstellingen onderstreept.

Nu algemeen. We gaan uit van een vorm $F(a, b, c) = ax^2 + bxy + cy^2$ met $d < 0$.

Stel verder dat een getal $k > 0$, waarbij steeds $(k, d) = 1$ ondersteld wordt, door F *eigenlijk* wordt voorgesteld. Dat betekent dat er een x_0 en een y_0 zijn, zodat: $ax_0^2 + bx_0y_0 + cy_0^2 = k$, terwijl $(x_0, y_0) = 1$.

We passen op F de (modulaire) transformatie $\begin{pmatrix} x_0 & r \\ y_0 & s \end{pmatrix}$ toe; we krijgen: $kx^2 + exy + fy^2$; nu de transformatie $\begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; de coëfficiënt van xy wordt dan $l = 2hk + e$; we bepalen h zó, dat $0 \leqq l < 2k$ wordt. Dan is l *precies* bepaald!

We krijgen de vorm $G(k, l, m) = kx^2 + lxy + my^2$ (m volgt weer uit de invariantie van d). Bij een bepaalde eigenlijke voorstelling van k door x_0, y_0 hoort dus precies één waarde van l. Daar $l^2 = d + 4km$ en dus $l^2 \equiv d \pmod{4k}$ kunnen we ook omgekeerd eerst getallen l zoeken, die aan deze congruentie voldoen. De vraag rijst echter of ook *andere* eigenlijke voorstellingen van k door F *dezelfde* l zullen geven; stel nl. dat met behulp van de eigenlijke voorstelling $ax_1^2 + bx_1y_1 + cy_1^2 = k$ na analoge transformaties $F(a, b, c)$ ook in $G(k, l, m)$ over te voeren was!

We hebben dan 2 modulaire transformaties M en N, die beide $F(a, b, c)$ overvoeren in $G(k, l, m)$. Dus b.v. $M(F) = G$ en $N(F) = G$.

Dus is $M(F) = N(F)$; dus $N^{-1}M(F) = F$. Bij iedere modulaire transformatie die F in G overvoert, hoort dus een transformatie, die F in F overvoert. Daar het ons alleen om het *aantal* te doen is, behoeven we slechts te bepalen, hoeveel transformaties F in zichzelf overvoeren.

Stel $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ voert F in zichzelf over. Om de getallen p, q, r en s te vinden moeten we oplossen: $ps - qr = 1$; $a = ap^2 + bpr + cr^2$; $b = \ldots$; $c = \ldots$.

De berekening is niet moeilijk; ik schrijf meteen het antwoord op: $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(t - bu) & -cu \\ au & \frac{1}{2}(t + bu) \end{pmatrix}$ hierin zijn t en u wortels van $t^2 - du^2 = 4$.

Aan deze „vergelijking van Pell'' voldoen voor d > 0 oneindig veel stellen wortels. Voor $d < 0$ is het aantal eindig en wel:

2 voor $d < -4$ (2; 0); (—2; 0)
4 voor $d = -4$ (2; 0); (—2; 0); (0; 1); (0; —1)
6 voor $d = -3$ (2; 0); (—2; 0); (1; 1); (1; —1); (—1; 1); (—1; —1)

We zullen dit aantal steeds w noemen.

Het aantal *eigenlijke* voorstellingen van k door een representantensysteem is dus gelijk aan w keer het aantal wortels van $l^2 \equiv d \pmod{4k}$; $(k, d) = 1$; $0 \leqq l < 2k$. Dit is nu juist de congruentie uit de inleiding. Dus is het aantal eigenlijke voorstellingen $w \sum\limits_{\substack{f|k \\ f \text{ kwadraatvrij}}} (d/f)$.

In ons voorbeeld was $d = -23$; $k = 16$; dus komt er 2 $(-23/1) + (-23/2)$.

Nu heeft het symbool van Kronecker de periode 8; dus $(-23/2) = (1/2) = 1$.
Er komt dus inderdaad 4 uit.
Nu de oneigenlijke voorstellingen.
Stel: $ax_1^2 + bx_1y_1 + cy_1^2 = k$; $(x_1, y_1) = r$; $x_1 = rx_0$; $y_1 = ry_0$; $ax_0^2 + bx_0y_0 + cy_0^2 = \frac{k}{r^2}$. Hier staat een *eigenlijke* voorstelling van $k : r^2$ door $F(a, b, c)$. Stellen we het *totaal* aantal voorstellingen van k door een representantensysteem voor door $Z(k)$, dan is dus:

$$Z(k) = w \sum_{\substack{r^2|k \\ r>0}} \sum_{\substack{f|\frac{k}{r^2} \\ f \text{ kwadraatvrij}}} (d/f).$$

Deze formule ziet er op het eerste gezicht onhandelbaar uit, kan echter op verrassende wijze worden vereenvoudigd.
$(d/f) = (d/f)(d/r^2)$; immers $(d, k) = 1$, dus ook $(d, r) = 1$; dus $(d/r^2) = (d/r)^2 = 1$.

Dus ook: $(d/f) = (d/fr^2)$. Nu doorloopt fr^2 alle delers van k, daar iedere deler van k slechts op één manier te schrijven is als het produkt van een kwadraat en een kwadraatvrij getal. De formule wordt nu belangrijk eenvoudiger:

$$Z(k) = w \sum_{\substack{n|k \\ (k, d)=1}} (d/n).$$

Voorbeeld. We hadden $d = -23$; $k = 16$.
$Z(16) = 2\ [(-23/1)+(-23/2)+(-23/4)+(-23/8)+(-23/16)]$.
Nu was reeds $(-23/2) = 1$; dus alle volgende ook. $Z(16) = 10$. Klopt!

Een andere overbekende stelling uit de getallentheorie volgt nu ook direct.

Als p een priemgetal is, congruent 1 modulo 4, dan is p te schrijven als de som van twee kwadraten.
$x^2 + y^2 = p$; $d = -4$; dus $Z(p) = 4.\ [(-4/1) + (-4/p)] = 4.\ [1 + (-1/p)]$.

In de inleiding vonden we $(-1/p) = (-1)^{\frac{1}{2}(p-1)} = 1$.
Dus $Z(p) = 8$. B.v. $p = 13$

x	2	2	−2	−2	3	3	−3	−3
y	3	−3	3	−3	2	−2	2	−2

Men kan dus ook zeggen dat 13 op 1 manier te schrijven is als de som van twee kwadraten. Tevens volgt uit het bovenstaande direct dat een priemgetal, congruent 3 modulo 4 niet te schrijven is als de

som van 2 kwadraten. Dit laatste is ook onmiddellijk duidelijk.

Daar x^2 en y^2 beide $\equiv 0$ of 1 (mod 4) zijn, kan nooit $x^2 + y^2 \equiv 3$ (mod 4).

We keren terug tot het algemene geval.

In het voorbeeld $d = -23$; $k = 16$ hebben we gezien dat verschillende klassen verschillende aantallen voorstellingen gaven.

We beschouwen nu de functies:

$$\mathrm{H}(t) = \sum_{\substack{k=1 \\ (k,\,d)=1}}^{k=t} \mathrm{Z}(k).$$

k doorloopt de met d ondeelbare getallen van 1 tot t; bij elke k bepaalt men het aantal voorstellingen door een representatensysteem. $\mathrm{H}(t)$ is dan de som van al die aantallen.

$$\mathrm{H}(t, F) = \sum_{\substack{k=l \\ (k,\,d)=1}}^{k=t} \mathrm{Z}(k, F).$$

Hier nemen we een vaste vorm F; dus een representant van een klasse.

Dan $\mathrm{A} = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\mathrm{H}(t)}{t}$; en $\mathrm{B} = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\mathrm{H}(t; F)}{t}$.

A en B blijken beide te bestaan; verder blijkt B niet af te hangen van de *klasse* waarvan men een representant genomen heeft; noemt men dus het aantal klassen $h(d)$, dan is $\mathbf{h(d) = A : B}$.

Berekening van A.

(1) $$\frac{\mathrm{H}(t)}{w \cdot t} = \frac{1}{t} \sum_{\substack{k=l \\ (k,\,d)=1}}^{k=t} \sum_{n|k} (d/n).$$

Het aantal keren dat eenzelfde (d/n) voorkomt stellen we $\mathrm{E}(t,d,n)$. (d/n) komt voor als $n|k$, dus voor:

$k = n, 2n, 3n, \ldots, \left[\dfrac{n}{t}\right] \cdot n$. Van deze waarden moeten we alleen diegene hebben, die onderling ondeelbaar zijn met d. Daar $(d/n) = 0$ als $(d, n) > 1$, behoeven we slechts de getallen $1, 2, \ldots, \left[\dfrac{t}{n}\right]$ te beschouwen.

We vormen groepen: $1, 2, 3, \ldots, |d|$; $|d| + 1, \ldots, 2|d|; \ldots$. Nu is $\varphi(|d|)$ het aantal natuurlijke getallen kleiner dan $|d|$ en onderling ondeelbaar met d. Daar deze bekende functie er straks

toch uitvalt, bereken ik hem niet. Eenvoudig volgt nu:

$$\mathrm{E}(t, d, n) = \frac{t}{n|d|}\varphi(|d|) + \mathrm{O}(|d|)$$

($\mathrm{O}(|d|)$ betekent ,,van de orde $|d|$").

Dus $$\lim_{t\to\infty} \mathrm{E}(t, d, n) : t = \frac{\varphi(|d|)}{|d|}\frac{1}{n}.$$

(1) kunnen we nu aldus schrijven:

$$\frac{\mathrm{H}(t)}{w \cdot t} = \sum_{n=1}^{\infty} (d/n) \frac{\mathrm{E}(t, d, n)}{t}.$$

We mogen voor n de bovengrens oneindig nemen, omdat voor $n > t$, $\mathrm{E}(t, d, n) = 0$ is.

Men kan bewijzen dat deze reeks gelijkmatig convergeert, zodat ten slotte:

$$\mathrm{A} = \lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{H}(t)}{t} = w. \quad \frac{\varphi(|d|)}{|d|} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (d/n).$$

De berekening van B loopt heel anders. We hebben nu een *vaste* vorm: $F(a, b, c) = ax^2 + bxy + cy^2$; $(a, b, c) = 1$; $d < 0$; $a > 0$; $c > 0$. We laten nu x en y gehele waarden doorlopen, zodanig dat $F = k < t$ en $(k, d) = 1$. We moeten dus *die* roosterpunten binnen de ellips $ax^2 + bxy + cy^2 = t$ hebben, waarvoor $(k, d) = 1$ is. Stel eerst $d = -p^n$ (p priem); nu is $d = b^2 - 4ac$; als nu $p|ac$, dan volgt $p|b$; dus kan niet tegelijk $p|a$ èn $p|c$ zijn (daar $(a, b, c) = 1$). Zonder aan de algemeenheid tekort te doen onderstellen we dat p geen deler van a is. Nu wordt verder:

$$4aF = (2ax + by)^2 - dy^2;$$

dus moet p geen deler van $2ax + by$ zijn. Laat nu x de waarden $1, 2, 3, \ldots, |d|$ doorlopen, dan zijn er van de waarden $y = 1, 2, 3, \ldots |d|$ juist $\varphi(|d|)$, zodanig dat $(2ax + by, d) = 1$. In een vierkant met zijde $|d|$ zijn er dan juist $|d|\varphi(|d|)$ bruikbare roosterpunten. Deze redenering is uit te breiden voor alle discriminanten d.

Laat $(x_0; y_0)$ een bruikbaar roosterpunt zijn. We tekenen de lijnen $x = x_0 + \lambda d$ en $y = y_0 + \lambda d$. We krijgen een netwerk van vierkanten met zijde $|d|$. Het aantal vierkanten, waarvan het hoekpunt, dat links-onder ligt binnen of op de ellips $F = t$ valt stellen we $\mathrm{U}(t)$. Een benadering voor $\mathrm{U}(t)$ is dan de oppervlakte van de ellips gedeeld door d^2. Om een precies antwoord te krijgen verkleinen we de figuur in de verhouding $1 : \sqrt{t}$.

De ellips gaat dan over in de ellips $e : ax^2 + bxy + cy^2 = 1$; de afmetingen van de vierkanten worden: $|d| : \sqrt{t}$; laten we nu t naar oneindig gaan, dan volgt uit de integraalrekening:

$$\lim_{t \to \infty} \mathrm{U}(t) \cdot d^2 : t = \text{opp. van } e = \frac{2\pi}{\sqrt{|d|}}.$$

In een vierkant met zijde $|d|$ lagen in de oorspronkelijke figuur $|d| \; \varphi(|d|)$ bruikbare roosterpunten. Dus komt er:

$$\mathrm{B} = |d|\varphi(|d|) \lim_{t \to \infty} \frac{\mathrm{U}(t)}{t} = |d|\varphi(|d|) \cdot \frac{2\pi}{d^2\sqrt{|d|}} = \frac{2\pi\varphi(|d|)}{|d|\sqrt{|d|}}.$$

$$h(d) = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \frac{w\sqrt{|d|}}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (d/n) \frac{1}{n}.$$

Nu rest nog de som van de oneindige reeks te bepalen; dit gebeurt met behulp van de z.g. sommen van Gauss. Ik ga hier niet verder op in, maar wil er alleen op wijzen, dat Landau deze sommen zo belangrijk vond, dat hij niet minder dan vier bewijzen gaf; en wel met fourierreeksen, met contourintegralen, met matrixrekening en met alleen goniometrie.

Alleen voor een speciaal geval vermeld ik hier de einduitkomst. Stel $d = -p$; p is een priemgetal. Dan:

$$p \equiv 3 \pmod 8);\; h(d) = \tfrac{1}{3} \sum_{r=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} (r/p)$$

$$p \equiv 7 \pmod 8);\; h(d) = \sum_{r=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} (r/p)$$

Daar het aantal klassen bij een gegeven d minstens gelijk aan één is, moeten de rechterleden in bovenstaande formules een positieve uitkomst geven; dit betekent dat er onder de getallen 1, 2, 3, . . ., $\frac{1}{2}(p-1)$ meer kwadraatresten dan niet-resten zijn. Daarmee is dan de opmerking uit de inleiding aangetoond.

VERSCHEIDENHEDEN

door

Prof. dr. O. BOTTEMA

Delft

LXIV. *Schommelen.*

Bij bevredigend schommelen gaat het niet alleen heen en weer, maar ook hoger, hoger, keer op keer. Het begin is altijd moeilijk, maar als de gang er wat in zit, dan kan men wel door een bepaald gedrag, zonder hulp van omstanders, de uitslagen opvoeren. De instinctief uitgevoerde manoeuvre komt neer op een ritmisch heffen en dalen van het lichaam en men zal zich herinneren dat het geboden is in de uiterste standen door de knieën te gaan, en bij het passeren van de evenwichtsstand zich fier op te richten. Om af te remmen passe men de inverse bewerking toe.

De mechanica van dit proces is op fraaie wijze behandeld door Magnus in zijn boek over trillingsleer [1]), waar men kan leren dat het thuis hoort in de rubriek „parametererregte Schwingungen". De schommel wordt tot het uiterste gestyleerd: het is een wiskundige slinger, een massaloze draad of dunne staaf OP, die aan het uiteinde een stoffelijk punt draagt met de eenheid van massa. Wij beschouwen de periode van de uiterste stand rechts naar de uiterste stand links en vereenvoudigen ook het heffen en dalen door aan te

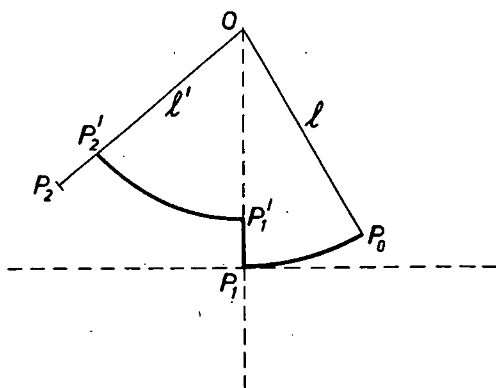


Fig. 1.

[1]) K. Magnus, Schwingungen. (Stuttgart, 1961), 131—135.

nemen, dat het discontinu plaatsvindt: de slingerlengte blijft gelijk aan l tot de evenwichtsstand is bereikt, verandert dan plotseling in de kleinere waarde l', houdt deze tot de uiterste linkerstand en neemt daar weer in eens toe tot de waarde l (fig. 1). Zij g de versnelling van de zwaartekracht, h_0 de hoogte van P_0 en h_2 en h'_2 die van P_2 en P'_2 boven het horizontale vlak door het laagste punt P_1, ω de hoeksnelheid in P_1, ω' die in P'_1.

Daar $l\omega$ de snelheid in P_1 is volgt uit de energiebalans langs P_0P_1:

$$\tfrac{1}{2}l^2\omega^2 = gh_0 \tag{1}$$

De kracht die het stoffelijk punt heft van P_1 naar P'_1 heeft geen moment ten opzichte van O. Het impulsmoment t.o.v. O verandert dus niet:

$$l^2\omega = l'^2\omega' \tag{2}$$

Voor het traject $P'_1P'_2$ geldt

$$\tfrac{1}{2}l'^2\omega'^2 + g(l - l') = gh'_2\,, \tag{3}$$

terwijl ten slotte tussen h_2 en h'_2 de betrekking

$$(h'_2 - h_2) : (l - h_2) = (l - l') : l$$

bestaat, of wel

$$l'h_2 = lh'_2 - l(l - l') \tag{4}$$

Eliminatie van ω, ω' en h'_2 uit (1), (2), (3) en (4) geeft het eenvoudige antwoord:

$$h_2 = \frac{l^3}{l'^3}\,h_0 \tag{5}$$

Wij zien dus dat de hoogte die na één halve slingering bereikt wordt gelijk is aan de met k^3 vermenigvuldigde oorspronkelijke hoogte, waarbij $k = \dfrac{l}{l'} > 1$. De hoogten nemen toe volgens de termen van een meetkundige reeks. In onze vereenvoudiging, waarbij geen demping in aanmerking is genomen, wordt de grootst mogelijke hoogte, $2l$, bereikt, waarna de geschetste manoeuvre bij het ontbreken van uiterste standen niet kan worden voortgezet. Wel moeten wij bedenken dat bij onze beschouwingen de tijd geëlimineerd is en het is welbekend dat als een slinger net genoeg energie heeft om het hoogste punt te bereiken, dit niet in eindige tijd gebeurt. Wij willen op deze finesses niet ingaan en liever de

vraag stellen waar de energie vandaan komt, die tot de door (5) bepaalde hoogtevermeerdering heeft geleid.

Het is duidelijk dat bij het heffen van P_1 naar P_1' arbeid verricht is en wel door een kracht die gelijk is aan (aanvankelijk een weinig groter is dan) de neerwaartse kracht. Deze laatste is gelijk aan het gewicht van het stoffelijk punt vermeerderd met de middelpuntvliedende kracht. Wel is waar wordt op het traject $P_2'P_2$ arbeid afgegeven, maar deze hoeveelheid is ten duidelijkste kleiner, omdat daar slechts een component van het gewicht en in het geheel geen middelpuntvliedende kracht in het spel zijn.

Men kan langs deze weg de uitkomst (5) verifiëren. Dan moet worden bedacht dat de hefkracht langs P_1P_1' niet constant is, maar van de plaats afhankelijk. Zij x de afstand tot O en $\Omega(x)$ de bijbehorende hoeksnelheid. Dan is, analoog met (2):

$$l^2\omega = x^2\Omega \tag{6}$$

De hefkracht is dus

$$K(x) = g + x\Omega^2 = g + \frac{l^4\omega^2}{x^3} \tag{7}$$

en de verrichte arbeid

$$A_1 = \int_l^{l'} - K(x)\mathrm{d}x = \left(- gx + \frac{l^4\omega^2}{2x^2}\right)\Bigg|_l^{l'} = g(l - l') + gh_0(k^2 - 1)$$

Trekt men hier af de langs $P_2'P_2$ door het gewicht verrichte arbeid

$$A_2 = g(h_2' - h_2)$$

d.i. volgens (4):

$$A_2 = gh_2\frac{1-k}{k} + g(l - l')$$

dan vindt men voor de energietoename $A_1 - A_2 = g(h_2 - h_0)$ zodat

$$h_2 - h_0 = h_0(k^2 - 1) + h_2\frac{k-1}{k}$$

of wel

$$h_2 = k^3h_0 \tag{8}$$

in overeenstemming met (5).

Wij merken nog op dat als de heffing van l naar l' niet plotseling in P_1, maar geleidelijk van P_0 af naar P_1' plaats vindt de winst aan energie altijd kleiner is dan in het hier beschouwde extreme geval.

KORREL CXXXIII

(commutatieve en associatieve eigenschap)

We leren onze leerlingen:

$$ab = ba$$
$$a(bc) = (ab)c.$$

Dan vertellen we ze, dat deze eigenschappen algemeen gelden, d.w.z. dat men in een produkt van een willekeurig aantal factoren de volgorde van de factoren mag wijzigen en de factoren op willekeurige wijze mag samennemen.

Waarop is de juistheid van deze uitspraak gebaseerd? Laten we het probleem iets algemener formuleren. In een verzameling is een interne operatie gedefinieerd. Het operatiesymbool laten we, zoals bij de vermenigvuldiging, gemakshalve weg. We nemen aan, dat voor deze operatie de commutatieve eigenschap geldt:

$$ab = ba.$$

Is het nu mogelijk de gegeneraliseerde commutatieve eigenschap hieruit af te leiden en b.v. te bewijzen, dat

$$abcde = bdaec?$$

Hierin is *abcde* een verkorte schrijfwijze voor $a(b(c(de)))$.

We nemen het eenvoudige voorbeeld van drie elementen en gaan uit van $(ab)c$. Wat kan door herhaald toepassen van de commutatieve eigenschap hieruit afgeleid worden?

$$(ab)c \begin{matrix} \nearrow (ba)c \searrow \\ \searrow c(ab) \nearrow \end{matrix} c(ba).$$

Meer niet en dus blijkbaar niet $(ab)c = (ac)b$. Het antwoord op de vraag is dus ontkennend.

Kan uit de geldigheid van de associatieve eigenschap de geldigheid van de gegeneraliseerde associatieve eigenschap afgeleid worden?

Dit kan wel. We tonen dit aan met behulp van volledige inductie. Neem aan, dat het juist is voor „produkten" met hoogstens n elementen. Bewijs, dat het dan ook juist is voor produkten met $n+1$ elementen.

Elk gedurig produkt is opgebouwd door herhaald uitvoeren van de operatie: vermenigvuldig twee elementen. Een produkt van $n + 1$ elementen is dus een produkt van twee factoren met elk minder dan $n + 1$ elementen. Krachtens de hypothese van de inductie is voor elk van deze twee factoren de gegeneraliseerde associatieve eigenschap van kracht. En dus is het produkt te schrijven in de vorm

$$(a_{n+1}a_n \dots a_{k+1})(a_k \dots a_1).$$

Of, anders geschreven,

$$(a_{n+1}(a_n \dots a_{k+1}))(a_k \dots a_1).$$

Hier staat een produkt van drie factoren en daarvoor is de associatieve eigenschap reeds van kracht. We mogen het produkt dus vervangen door

$$a_{n+1}((a_n \dots a_{k+1})(a_k \dots a_1)).$$

De rechter twee factoren van dit produkt bestaan samen uit n elementen en hierop mag dus de hypothese van de inductie toegepast worden. We krijgen dan

$$a_{n+1}(a_n \dots a_1).$$

Omdat de overgebleven haakjes overbodig zijn, is hiermee het verlangde resultaat verkregen.

Opmerkingen. 1. Het zal wel direct duidelijk zijn, dat de gegeneraliseerde commutatieve eigenschap wel afgeleid kan worden uitgaande van de commutatieve en de associatieve eigenschap samen.

2. Dat de gegeneraliseerde associatieve eigenschap uit alleen de associatieve eigenschap afgeleid kan worden, is van belang. Dit wordt geregeld toegepast, b.v. in de groepentheorie.

P. G. J. Vredenduin

WIMECOS

De penningmeester van Wimecos verzoekt de leden hun contributie voor het verenigingsjaar 1966-1967 ten bedrage van *f* 9.— (inclusief toezending van Euclides) te storten of over te maken op postrekening 143917 tnv Wimecos, Amsterdam. Leden die Euclides op andere wijze ontvangen wordt verzocht hun contributie ten bedrage van *f* 3.50 over te maken.

BOEKBESPREKING

J. D. Williams, *The Compleat Strategist*, (revised edition), McGraw-Hill Book Co., New York, enz., 1966, XVI + 268 blz., 56/—.

Het boek is met een zeldzame helderheid geschreven. Men kan het betoog volgen met een minimale hoeveelheid inspanning en zelfs met een minimale hoeveelheid intellectuele capaciteiten. Men ziet precies, wat het probleem is, waarvoor men zich in de speltheorie gesteld ziet. Verder wordt haarfijn uiteengezet in eenvoudige gevallen, welke strategie men dient te kiezen. Maar helaas is hier dan ook alles mee gezegd. Reeds in het eenvoudigste geval vertelt de schrijver alleen, hoe men zijn strategie moet kiezen en voegt daaraan toe, dat hij geen motivering van de juistheid van het resultaat kan geven „because we don't know how to do it in nonmathematical terms". En zo krijgt men dan reeds op pag. 39 het lid op de neus. Het zou onvriendelijk zijn t.o.v. de schrijver het boek nu waardeloos te noemen. Maar de lezer van Euclides zou ik toch een andere weg willen adviseren om met speltheorie in aanraking te komen.

P. G. J. Vredenduin

Afbeeldingsmeetkunde, door Dr. A. van Dop, Dr. Jr. B. Groeneveld en Dr. A. van Haselen. Deel I ing. ƒ 4.90, J. B. Wolters.

Wanneer de voorzitter van Wimecos met routiniers als van Dop en van Haselen een nieuw boek voor de meetkunde aan de markt brengt, is de belangstelling van hem die dit boek mag bespreken zonder enige moeite geraakt.

De bespreking kan dan beginnen met overname van het voorbericht.

„In het eerste deel worden de eigenschappen van de behandelde figuren verkregen door uit te gaan van de drie congruente transformaties: spiegelingen, rotaties en translaties. Allereerst wordt met behulp van een vierkantenrooster de spiegeling t.o.v. een lijn behandeld. Het rooster geeft ook de gelegenheid om op eenvoudige wijze coördinaten in te voeren. Daarna worden hoeken ingevoerd en komt de rotatie aan de orde. Vervolgens maken de leerlingen kennis met vectoren en hun optelling. De translatie brengt hen dan tot het begrip evenwijdigheid en tot de eigenschappen van de hoeken, gevormd door twee evenwijdige lijnen, gesneden door een derde. De eigenschappen van een vlieger en een ruit worden door toepassing van spiegelingen verkregen. Constructies van driehoeken met drie gegeven elementen, leiden tot de congruentiekenmerken van driehoeken. Voorts worden de bekende eigenschappen van parallellogrammen met behulp van puntspiegelingen afgeleid. Te grote strengheid is in het begin vermeden".

Aan deze inleiding voeg ik toe, dat ook het trapezium aan de orde komt; verzamelingen heb ik tot mijn instemming in dit eerste deel gemist.

Ik geef hierbij enige kanttekeningen.

1. De invoering van coördinaten en vectoren biedt inderdaad voordelen; of ze voor dit boek iets wezenlijks inhouden, waag ik te betwijfelen; ze verdwijnen spoedig uit het blikveld.

2. Verschillende nieuwe boeken drukken de congruentie wat terug. Hoewel die hier pas vrij laat aan de orde is, wordt er voldoende meegewerkt en worden er voldoende vraagstukken ons gegeven.

3. De vermijding „van te grote strengheid" voert natuurlijk tot de „je ziet wel"-methode. Zo is het spiegelbeeld van lijnstuk AB het verbindingslijnstuk van de spiegelpunten van de uiteinden A en B van AB. We zien dat AB en A_1B_1 elkaar op de as snijden en „het bekijken" van de figuur leert ons dat AB en A_1B_1 even

lang zijn. Vooruit dan maar. We moeten de leerling maar duidelijk maken, dat de „je ziet wel"-methode aan leraar en boek is voorbehouden. Tot dit duidelijk maken ben ik overigens gaarne bereid; mijn leerlingen - en die van de auteurs vermoedelijk - zijn hunnerzijds gaarne bereid in hun vraagstukken deze methode aan te wenden en bereiken daarbij op frapperende wijze de meeste verbluffende en m.i. onjuiste resultaten.

4. Het boek is dun, 186 bladzijden met 109 figuren in ruim gedrukte tekst. Dat houdt een plus in.

5. De vraagstukken zijn niet moeilijk; ze zijn met zorg gekozen en goed gedoseerd. Hun karakter is zeker niet spectaculair van nieuwlichterigheid. Nog een plus. M.i. is vraagstuk 15 van pag. 72 fout; in som 5 pag. 91 lijkt mij AB // DC beter dan AB // CD; in som 25 pag 59 is de evenwijdigheid niet met pijlen aangegeven, bij de volgende som wel en in andere figuren weer niet.

6. Bezwaren heb ik tegen stelling 26. Natuurlijk is een vierhoek met vier gelijke zijden een parallellogram; de auteurs drukken dat vet en delen cursief mee dat het ook een ruit is. Ik had het liever andersom laten drukken ter vermijding van misverstanden.

7. De symbolen □ voor vierhoek en $\#$ voor „gelijk en evenwijdig" lijken mij niet geslaagd. Het eerste suggereert een vierkant en het tweede lijkt mij te veel op het teken voor „ongelijk".

Mogen deze opmerkingen ten dele aanmerkingen zijn, mijn totale indruk is bijzonder gunstig. Helder verantwoord en in aansprekende taal is het boek geschreven. Toch zou ik graag mijn eind oordeel willen opschorten tot dat de delen 2 en 3 verschenen zijn. Er zijn meer nieuwe boeken verschenen, die het peil van het eerste deel later niet meer bereikten. Mij interesseert in het bijzonder het volgende:

a. Hoe worden de verzamelingen behandeld?

b. Worden de vermenigvuldiging, de evenredigheden, de gelijkvormigheid weer erg uitgebreid?

c. Hebben de auteurs de moed om het uiterste minimum te geven van de behandeling der cirkels? Over deze cirkels behoeven wij heus geen jaar te doen op de H.B.S. dat kan ook wel in een ruim kwartaal.

Groenman

J. de Kimpe, *Construeer.*

Werkschrift stereometrie voor de hoogste klassen van het v.h.m.o., J. M. Meulenhoff, Amsterdam, 1966, 124 blz., *f* 4.75.

Hoewel reeds verscheidene werkschriften stereometrie verschenen, zijn sommige zo verbonden met het theorieboek, dat afzonderlijk gebruik praktisch onmogelijk is.

Wenst men dus een verzameling goed opgezette en gevarieerde constructies, dan kan dit werkschrift zeker goede diensten bewijzen.

Het goed opzetten van een tekening door de leerling zelf, zal men echter nog wel ter dege dienen te oefenen.

Burgers

H. Behnke, G. Bertram, R. Sauer, *Grundzüge der Mathematik*, Band IV, Van denhoeck en Ruprecht, Göttingen, 1966, 406 blz., DM. 45.—

De eerste drie delen „*Reiner Mathematik*" van dit standaardwerk werden besproken in de 40 jaargang, blz. 124 e.v. Op deze drie delen volgen nog twee delen *Angewandter Mathematik*", waarvan dit het eerste is

Hoewel het tegenwoordig moeilijk is om onderscheid te maken tussen deze beide ,,wiskunden" hebben de schrijvers gemeend, tot het laatste te mogen rekenen de theorie die past bij elektronische rekenmachines, de numerieke wiskunde en alle fysisch-technische problemen.

Strubecker en Steinbacher bespreken de theorie van mechanische hulpmiddelen, de instrumenten inbegrepen, Hohenberg en Tschupik behandelen toepassingen van de meetkunde (projectiemethoden, de bewegingstheorie in R_2 en R_3), Freudenthal en Steiner de geschiedenis van de waarschijnlijkheidstheorie en de wiskundige statistiek, Münzner en Stange statistische methoden. Voor de school kan het laatste hoofdstuk van Stiefel dienst doen, door de voorbeelden die daarin gegeven worden van het grafisch oplossen van stelsels ongelijkheden die verband houden met praktische problemen.

Burgers.

C. J. Alders, *Algebra voor M.O. en V.H.O.* deel 2b, P. Noordhoff n.v., Groningen 1966, 92 blz.

Naast het bekende deel 2 (en deel 3) verschijnt deel 2b (en later 3b) waarin de schrijver een begin maakt met een modernisering van het onderwijs in de algebra *binnen* het bestaande programma.

Na hoofdstuk I: Vierkantsvergelijkingen volgt hoofdstuk II: Verzamelingen. Op eenvoudige en bevattelijke wijze worden de verzamelingen ingeleid, de som en de doorsnede van twee of meer verzamelingen, de begrippen deelverzameling, lege verzameling, het verschil van twee verzamelingen, venn-diagrammen en ,,Set notaties".

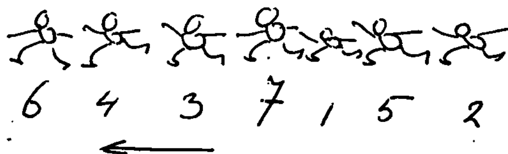
De functie wordt gedefinieerd als een verzameling van geordende paren. De afbeelding wordt wel even aangeroerd, maar wordt verschoven naar de hogere klassen. In het inleidende voorbeeld wordt de verzameling: (x, x^2), waarbij $x \in R$, gebruikt. In feite wordt dus een *operatie*, een rekenvoorschrift gegeven. Dit rekenvoorschrift dient dan gedefiniëerd te zijn voor de elementen van de verzameling die men als definitiegebied beschouwt. Als gevolg hiervan ontstaan de geordende paren, en wel als een éénduidige toevoeging van element en beeldelement. M.I. is het de operatie, die een functie definiëert, maar pas nadat de definitieverzameling gegeven is en de operatie met deze elementen uitvoerbaar is.

Burgers

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek.

160. Zeven soldaten van verschillende grootte marcheren in een rij:



De sergeant wil ze anders rangschikken en wel zo, dat ze volgens toenemende grootte geordend worden, de kleinste voorop. Hij laat daartoe drie soldaten uit de rij een pas zijwaarts maken en deze in versneld tempo naar de kop marcheren. Dit her-

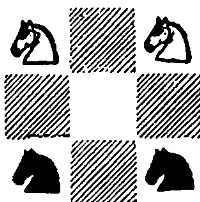
haalt hij nog twee keer en daarna zijn de soldaten volgens plan gerangschikt. Hoe is dit mogelijk?

Is dit bij elke beginrangschikking van de zeven soldaten mogelijk?
En zo neen, bij welke dan wel? (B. Kootstra)

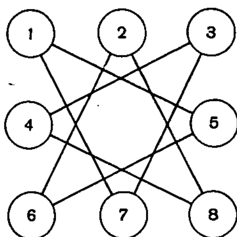
161 Negen eilanden moeten door acht bruggen zo verbonden worden, dat het mogelijk is via deze bruggen van elk eiland naar elk ander eiland te komen. Op hoeveel topologisch verschillende manieren is dit mogelijk?

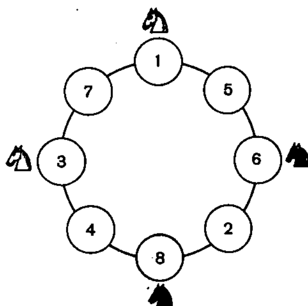
OPLOSSINGEN

157. Gevraagd werd in onderstaande figuur in een minimaal aantal zetten de witte en de zwarte paarden van plaats te doen verwisselen.



Nummer de vakken, waar de paarden kunnen komen van 1 tot en met 8 en verbind de vakken, die door één paardesprong uit elkaar bereikbaar zijn, door een lijn. Men krijgt dan de linker figuur. Uit deze ontstaat de rechter door de velden te hergroeperen zo, dat twee door een lijn verbonden velden naast elkaar komen.





De paarden zullen dus langs deze cirkel bewegen zo, dat ze elkaar niet ontmoeten. Voor het verwisselen van de witte en de zwarte zijn dus minimaal $4 . 4 = 16$ zetten nodig.

158. Dertien duivelsvissen moeten vier koningsvissen doden. Een koningsvis bewaakt door minder dan drie duivels eet de duivels op. Drie duivels en een koning houden elkaar in evenwicht. Vier duivels doden een koning in 1 minuut en meer dan vier duivels in een aantal minuten omgekeerd evenredig met hun aantal. Wat is de minimaal benodigde tijd om de vier koningen te doden?

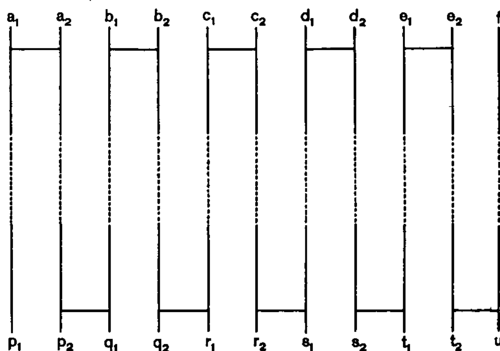
Als vier duivels een koning aanvallen doden ze gemiddeld per minuut elk $\frac{1}{4}$ koning. Vijf duivels doden een koning in $\frac{4}{5}$ minuut, zodat ook zij per minuut elk $\frac{1}{4}$ koning doden. Hetzelfde geldt voor meer dan vijf duivels.

Het begin kan alleen zijn: drie koningen worden elk door drie duivels bewaakt en de vierde wordt door de resterende vier duivels in 1 minuut gedood. Daarna moeten we ervoor zorgen, dat om elke koning steeds meer dan drie duivels zich bevinden en dat bovendien elke duivel permanent aan het aanvallen is. Hoe ze zich groeperen is verder niet van belang. Immers per minuut zal elk $\frac{1}{4}$ koning doden en in $3 : \frac{13}{4} = \frac{12}{13}$ minuut is het doden dan volbracht. In totaal is dus minimaal $\frac{25}{13}$ minuut nodig.

Merkwaardig is, dat deze eenvoudige oplossing door Loyd zelf niet gevonden is.

159. Een elektricien vindt op zolder elf draaduiteinden en in de kelder de andere einden van de elf draden. Hij kan twee uiteinden verbinden door een (kort) draadje of door middel van een batterij + schel. Hoe vindt hij, welke uiteinden bij elkaar passen, als hij een minimaal aantal keren van de kelder naar de zolder of omgekeerd mag gaan?

Hij verbindt op zolder vijf paren draden en merkt deze a_1, a_2, . . ., e_1, e_2.. De overblijvende draad merkt hij f. Nu gaat hij naar de kelder en vindt met behulp van zijn schel door systematisch te proberen, welke draden boven verbonden zijn. Hij merkt de uiteinden p_1, p_2, . . ., t_1, t_2 en het overblijvende u. Hij weet dus nu, dat b.v. p_1 en p_2 horen bij twee uiteinden op zolder, die met dezelfde letter gemerkt zijn, maar weet niet, welke deze letter is. Wel weet hij, dat u bij f hoort.



Daarna verbindt hij in de kelder wederom de draden twee aan twee, maar nu op de in de figuur aangegeven manier, dus u met t_2, t_1 met s_2, enz.

Vervolgens gaat hij weer naar de zolder en maakt de vroeger aangebrachte verbindingen los. Hij verbindt f door middel van batterij + schel met de andere draden, totdat de schel gaat luiden. Blijkt dat het geval te zijn, als f met e_2 verbonden is dan volgt daaruit, dat e_2 en t_2 samenhoren. Dan hoort e_1 bij t_1. Nu verbindt hij met behulp van batterij + schel e_1 met de andere draden, totdat de schel gaat luiden. Gebeurt dit, als e_1 met d_2 verbonden wordt, dan hoort d_2 bij s_2. Hij weet dan tevens, dat d_1 bij s_1 hoort, enz.

Eén keer heen en weer tussen zolder en kelder is dus voldoende voor de identificatie van de uiteinden.

Liefhebbers mogen het nu met een even aantal draden proberen. Het antwoord vinden zij in het boek van Gardner.